Materiales para la familia

División de fracciones

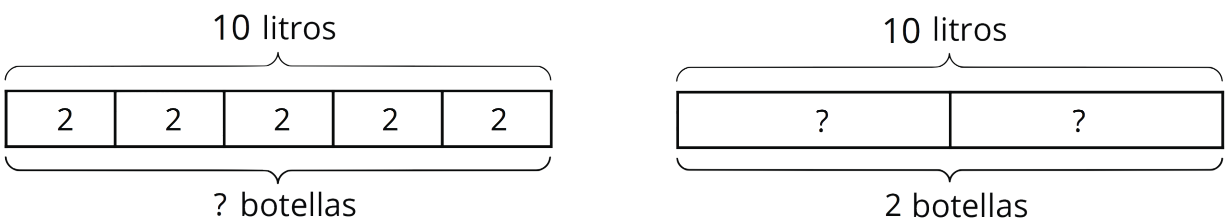
Comprendamos el sentido de la división

Materiales para la familia 1

Esta semana, nuestros estudiantes va a estar pensando en los sentidos de la división y así prepararse para aprender sobre la división de fracciones. Supongamos que tenemos 10 litros de agua que queremos dividir en grupos del mismo tamaño. Podemos pensar en la división $10 \div 2$ de dos maneras distintas (o como la respuesta a dos preguntas distintas):

- "¿Cuántas botellas podemos llenar con 10 litros si cada botella es de 2 litros?"
- "¿Cuántos litros caben en cada botella si dividimos 10 litros en 2 botellas?"

Estos son dos diagramas que muestran las dos interpretaciones de $10 \div 2$:



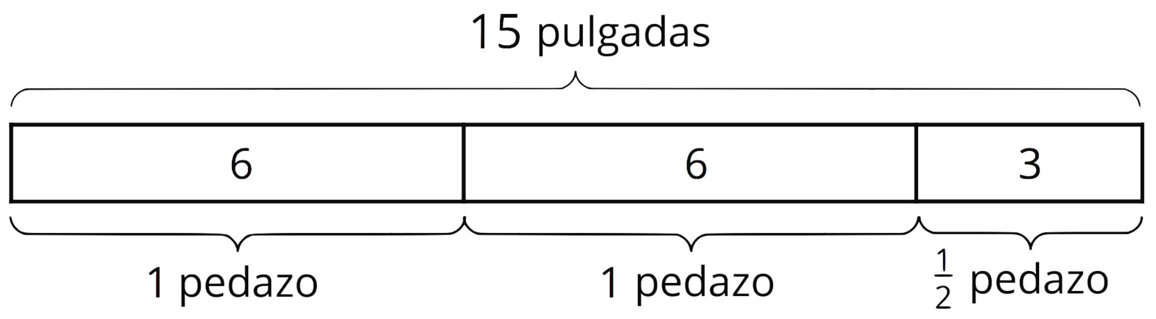
En ambos casos, la respuesta a la pregunta es 5, pero este puede significar, o que "hay 5 botellas con dos litros en cada una", o que "caben 5 litros en cada una de las dos botellas".

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. Escriban dos preguntas distintas acerca de $15 \div 6$.
2. Estimen la respuesta: ¿es menor que 1, igual a 1 o mayor que 1? Expliquen su estimación.
3. Encuentren la respuesta a una de las preguntas que escribieron. Hacer un dibujo puede ayudarlos.

Solución:

1. Las preguntas pueden variar. Ejemplos de preguntas:
    - Una cinta de 15 pulgadas de longitud se divide en 6 pedazos iguales. ¿Qué tan largo es cada pedazo (en pulgadas)?
    - Una cinta de 15 pulgadas de longitud se divide en pedazos de 6 pulgadas cada uno. ¿Cuántos pedazos hay?
2. Mayor que 1. Ejemplos de explicaciones:
    - $12 \div 6$ es 2, por lo tanto, $15 \div 6$ debe ser mayor que 2.
    - Si dividimos 15 en 15 grupos ($15 \div 15$), obtenemos 1 (es decir, 1 en cada grupo). Entonces, si dividimos 15 en 6, que es un número más pequeño de grupos, la cantidad en cada grupo debe ser mayor que 1.
3. $2\frac{1}{2}$. Ejemplo de diagrama:



Significados de la división de fracciones

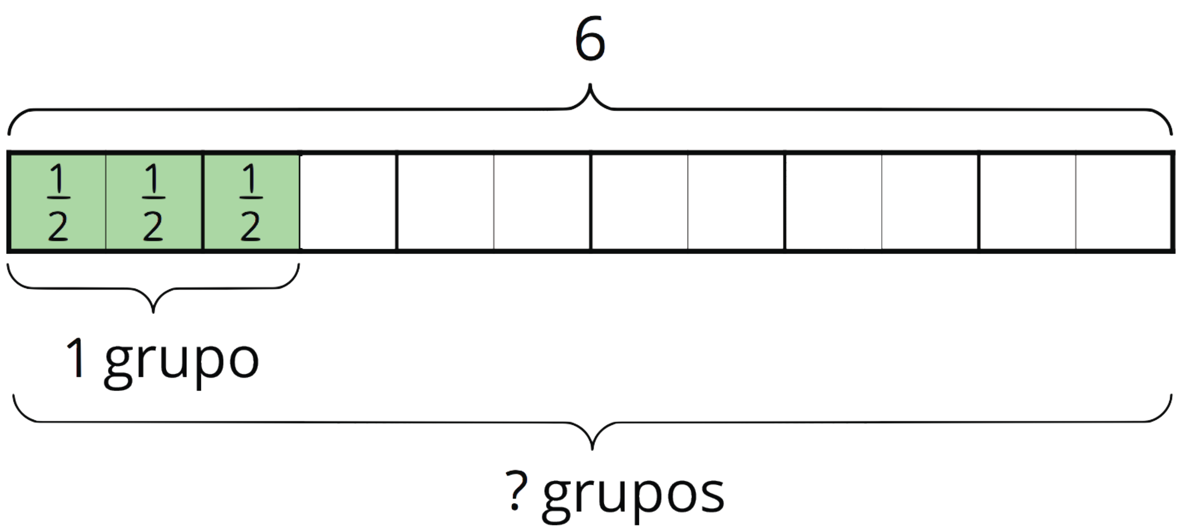
Materiales para la familia 2

En una lección anterior, nuestros estudiantes aprendieron que divisiones como $10 \div 2 = ?$ se pueden interpretar como "*¿Cuántos grupos* de 2 hay en 10" (es decir, cuántos grupos de 2 podemos formar con 10) o "*¿Cuánto hay en cada grupo* si hay 10 en 2 grupos?" (es decir, cuánto queda en cada grupo si repartimos 10 en 2 grupos). También aprendieron que la relación entre el 10, el 2 y el número desconocido ("?") se puede expresar con una multiplicación:

$$2 \cdot ? = 10$$
$$? \cdot 2 = 10$$

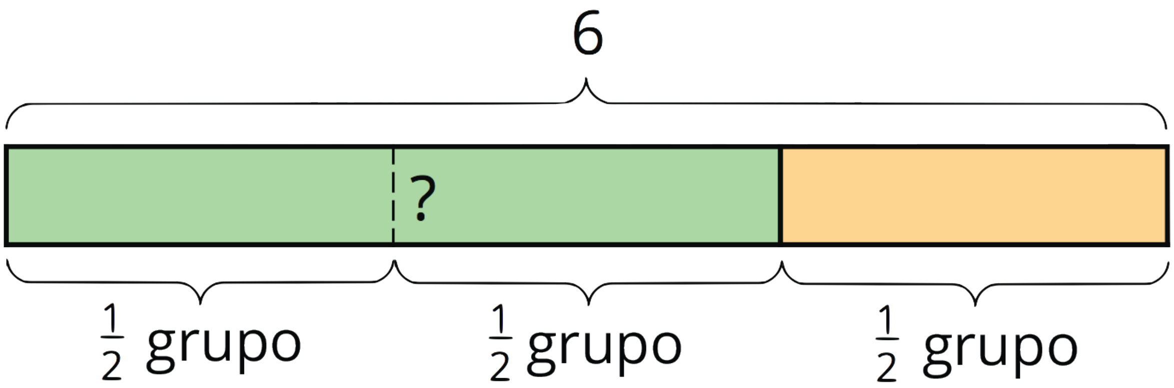
Esta semana, usarán estas mismas ideas para dividir fracciones. Por ejemplo, $6 \div 1\frac{1}{2} = ?$ se puede pensar como "¿Cuántos grupos de $1\frac{1}{2}$ hay en 6?" (es decir, cuántos grupos de $1\frac{1}{2}$ podemos formar con 6). Si expresamos la pregunta como una multiplicación y dibujamos un diagrama, esto puede ayudarnos a encontrar la respuesta.

$$? \cdot 1\frac{1}{2} = 6$$



En el diagrama podemos contar y ver que hay 4 grupos de $1\frac{1}{2}$ en 6.

También podemos pensar en $6 \div 1\frac{1}{2} = ?$ como "¿Cuánto hay en cada grupo si hay $1\frac{1}{2}$ grupos iguales en 6?" (es decir, cuánto habrá en cada grupo si repartimos 6 en $1\frac{1}{2}$ grupos iguales). Aquí un diagrama también nos puede ayudar.



A partir del diagrama vemos que hay tres $\frac{1}{2}$ grupos en 6. Esto quiere decir que hay 2 en cada $\frac{1}{2}$ grupo, o 4 en 1 grupo.

En ambos casos $6 \div 1\frac{1}{2} = 4$, pero ese 4 puede tener significados distintos, dependiendo de cómo se interprete la división.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. ¿Cuántos grupos de $\frac{2}{3}$ hay en 5? (es decir, ¿cuántos grupos de $\frac{2}{3}$ podemos formar con 5?)
    a. Escriban una ecuación de división para representar la pregunta. Usen "?" para representar la cantidad desconocida.
    b. Encuentren la respuesta. Expliquen o muestren su razonamiento.
2. Un bulto de harina pesa 4 libras. Un vendedor reparte la harina en bolsas del mismo tamaño.
    a. Escriban una pregunta que $4 \div \frac{2}{5} = ?$ podría representar en esta situación.
    b. Encuentren la respuesta. Expliquen o muestren su razonamiento.

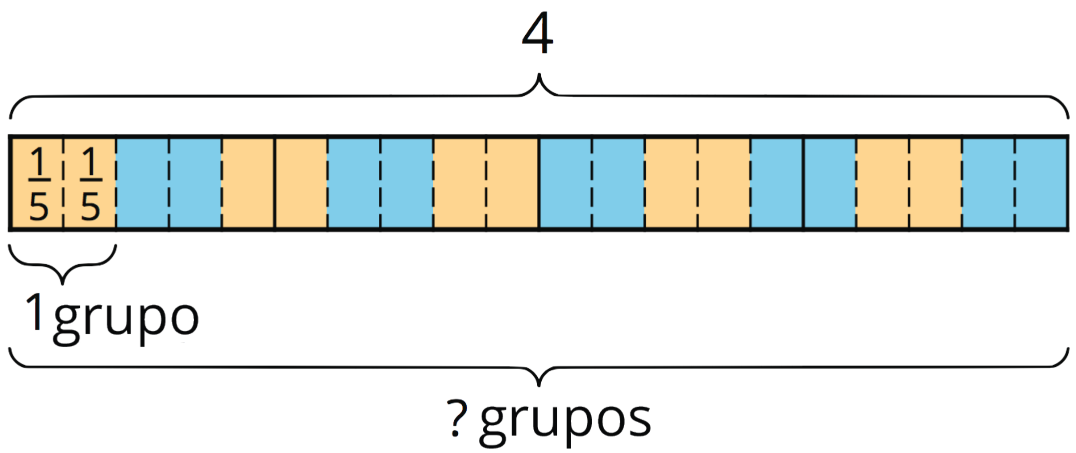
Solución:

1. a. $5 \div \frac{2}{3} = ?$

   b. $7\frac{1}{2}$. Ejemplo de razonamiento: Hay 3 tercios en 1, entonces, hay 15 tercios en 5. Por lo tanto, hay la mitad de 2 tercios, o $\frac{15}{2}$ dos tercios, en 5.

2. a. 4 libras de harina se dividen equitativamente en bolsas de $\frac{2}{5}$ libras cada una. ¿Cuántas bolsas habrá en total?

   b. 10 bolsas. Ejemplo de razonamiento: se parte cada 1 libra en quintos y luego se cuenta cuántos grupos de $\frac{2}{5}$ hay.



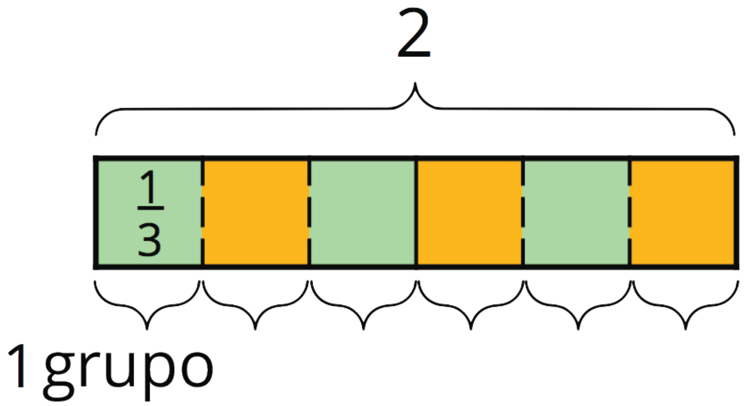
Algoritmo para la división de fracciones

Materiales para la familia 3

Muchas personas han aprendido que para dividir entre una fracción, "invertimos y multiplicamos". Esta semana, nuestros estudiantes aprenderán por qué esto funciona. Para ello, van a estudiar varios enunciados de división y diagramas como estos:

- $2 \div \frac{1}{3} = ?$ se puede ver como "¿Cuántos tercios ($\frac{1}{3}$) hay en 2?"

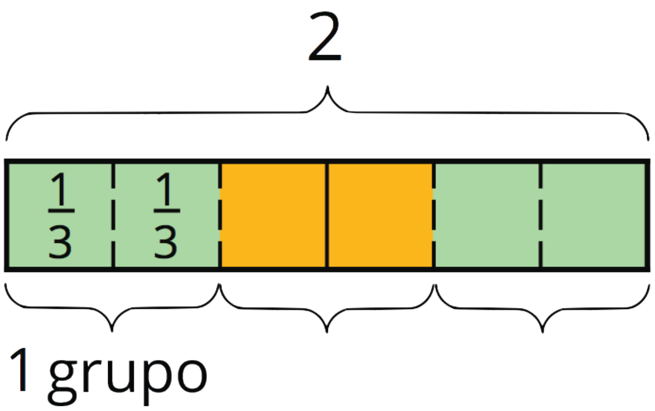
$$2 \div \frac{1}{3} = ?$$



Como hay 3 tercios en 1, hay $(2 \cdot 3)$ o 6 tercios en 2. Así que al dividir 2 entre $\frac{1}{3}$ se obtiene el mismo resultado que al multiplicar 2 por 3.

- $2 \div \frac{2}{3} = ?$ se puede ver como "¿Cuántos $\frac{2}{3}$ hay en 2?"

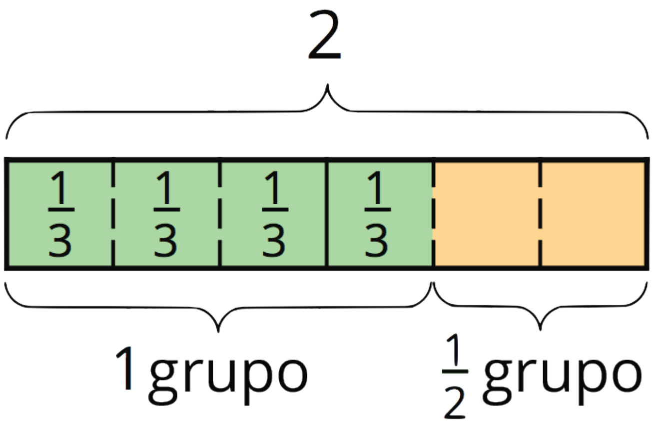
$$2 \div \frac{2}{3} = ?$$



Ya sabemos que hay $(2 \cdot 3)$ o 6 tercios en 2. Para encontrar cuántos $\frac{2}{3}$ hay en 2, debemos juntar cada 2 de los tercios para formar un grupo. Al hacer esto, obtenemos la mitad de los grupos que ya teníamos. Así, $2 \div \frac{2}{3} = (2 \cdot 3) \div 2$, que es igual a 3.

- $2 \div \frac{4}{3} = ?$ puede verse como "¿Cuántos $\frac{4}{3}$ hay en 2?”

$2 \div \frac{4}{3} = ?$



De nuevo, sabemos que hay $(2 \cdot 3)$ tercios en 2. Para encontrar cuántos $\frac{4}{3}$ hay en 2, debemos juntar cada 4 de los tercios para formar un grupo. Al hacer esto, obtenemos una cuarta parte de los grupos que ya teníamos (los del primer ejemplo). Así, $2 \div \frac{4}{3} = (2 \cdot 3) \div 4$, que es igual a $1\frac{1}{2}$.

Observen que cada uno de los problemas de división presentados arriba puede solucionarse multiplicando 2 por el denominador del divisor y luego dividiendo entre el numerador. Así, $2 \div \frac{a}{b}$ se puede resolver calculando $2 \cdot b \div a$, lo que también puede escribirse como $2 \cdot \frac{b}{a}$. En otras palabras, al dividir 2 entre $\frac{a}{b}$ se obtiene el mismo resultado que al multiplicar 2 por $\frac{b}{a}$. La fracción del divisor se "invierte" y luego se multiplica.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. Hallen cada cociente. Muestren su razonamiento.
   a. $3 \div \frac{1}{7}$

   b. $3 \div \frac{3}{7}$

   c. $3 \div \frac{6}{7}$

   d. $\frac{3}{7} \div \frac{6}{7}$

2. ¿Cuál es mayor: $\frac{9}{10} \div \frac{9}{100}$ o $\frac{12}{5} \div \frac{6}{25}$? Expliquen o muestren su razonamiento.

Solución:

1. a. 21. Ejemplo de razonamiento: $3 \div \frac{1}{7} = 3 \cdot \frac{7}{1} = 21$

   b. 7. Ejemplo de razonamiento: $3 \div \frac{3}{7} = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$

   c. $3\frac{1}{2}$. Ejemplo de razonamiento: $3 \div \frac{1}{7} = 3 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{2}$. La fracción $\frac{6}{7}$ es dos veces $\frac{3}{7}$, por lo tanto hay la mitad de $\frac{6}{7}$ en 3 que de $\frac{3}{7}$ en 3 (es decir: la cantidad de $\frac{6}{7}$ en 3 es la mitad de la cantidad de $\frac{3}{7}$ en 3).

   d. $\frac{1}{2}$. Ejemplo de razonamiento: $\frac{3}{7} \div \frac{6}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3}{6}$

2. Tienen el mismo valor. Ambos son iguales a 10. $\frac{9}{10} \div \frac{9}{100} = \frac{9}{10} \cdot \frac{100}{9} = 10$, y $\frac{12}{5} \div \frac{6}{25} = \frac{12}{5} \cdot \frac{25}{6} = 10$.

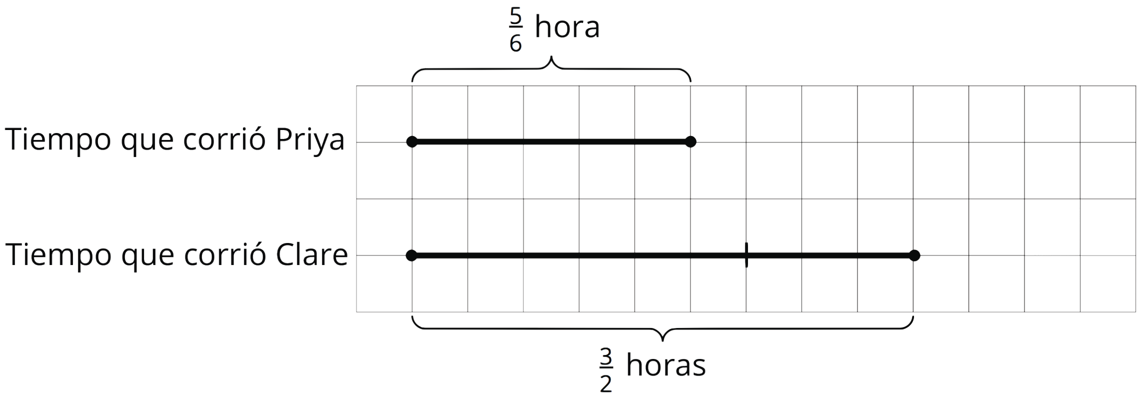
Fracciones en longitudes, áreas y volúmenes

Materiales para la familia 4

Durante los siguientes días, nuestros estudiantes van a estar resolviendo problemas en donde se necesita multiplicar y dividir fracciones. Algunos de esos problemas serán sobre comparación. Por ejemplo:

- Si Priya corrió durante $\frac{5}{6}$ hora y Clare corrió durante $\frac{3}{2}$ horas, ¿qué fracción del tiempo que corrió Clare fue el tiempo que corrió Priya?

  Podemos dibujar un diagrama y escribir una ecuación de multiplicación para dar sentido a la situación.

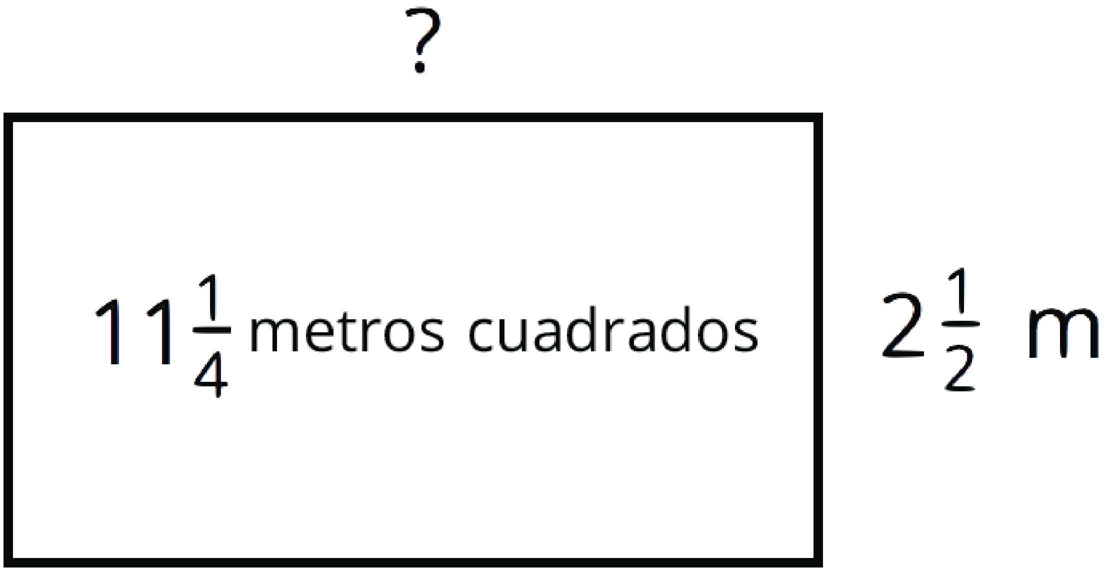
  

  $$\text{(fracción)} \cdot \text{(Tiempo de Clare)} = \text{(Tiempo de Priya)}$$
  $$? \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

  Podemos encontrar la cantidad desconocida si dividimos. $\frac{5}{6} \div \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$, es igual a $\frac{10}{18}$. Así que el tiempo que corrió Priya fue $\frac{10}{18}$ (o $\frac{5}{9}$) del tiempo de Clare.

Otro tipo de problemas que nuestros estudiantes van a resolver están relacionados con la geometría: longitudes, áreas y volúmenes. Algunos ejemplos:

- ¿Cuál es el largo de una habitación rectangular si su ancho es $2\frac{1}{2}$ metros y su área es $11\frac{1}{4}$ metros cuadrados?



Sabemos que podemos encontrar el área de un rectángulo multiplicando su largo por su ancho ($? \cdot 2\frac{1}{2} = 11\frac{1}{4}$), así que si dividimos $11\frac{1}{4} \div 2\frac{1}{2}$ (o $\frac{45}{4} \div \frac{5}{2}$) obtendremos el largo de la habitación. $\frac{45}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{45}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{2}$. La habitación tiene $4\frac{1}{2}$ metros de largo.

- ¿Cuál es el volumen de una caja (un prisma rectangular) de $3\frac{1}{2}$ pies por 10 pies por $\frac{1}{4}$ pies?

  Podemos hallar el volumen multiplicando las longitudes de los lados. $3\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4}$, que es igual a $\frac{70}{8}$. Por lo tanto, el volumen es $\frac{70}{8}$ o $8\frac{6}{8}$ pies cúbicos.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. En el primer ejemplo sobre los tiempos que corrieron Priya y Clare, ¿cuántas veces el tiempo que corrió Priya fue el tiempo que corrió Clare? Muestren su razonamiento.
2. El área de un rectángulo es $\frac{20}{3}$ pies cuadrados. ¿Cuál es su ancho si su largo es $\frac{4}{3}$ pies? Muestren su razonamiento.

Solución:

1. $\frac{9}{5}$. Ejemplo de razonamiento: podemos escribir $? \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$ para representar la pregunta "¿Cuántas veces el tiempo que corrió Priya fue el tiempo que corrió Clare?" y luego resolverla dividiendo. $\frac{3}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{10}$. El tiempo que corrió Clare fue $\frac{18}{10}$ (es decir, $\frac{9}{5}$) del tiempo que corrió Priya.

2. 5 pies. Ejemplo de razonamiento: $\frac{20}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{20}{4} = 5$